I.N.A. & E.N.S.A. 1984

MATHÉMATIQUES

(Option générale)

PREMIÈRE COMPOSITION

DURÉE : 3 heures

NOTATIONS. — Les fonctions qui interviennent sont réelles, de variable réelle. On note $f^{(0)} = f$ et $f^{(k)}$ la dérivée d'ordre k de f si elle existe.

Par convention $0\,! = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}, x^0 = 1$.

PREMIÈRE PARTIE

1° On suppose qu'il existe une suite de fonctions polynômes (P_n) $n \in \mathbb{N}$ satisfaisant aux conditions :

α_1 : $\forall n \in \mathbb{N}$, degré $P_n = n$.

α_2 : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P'_n = P_{n-1}$.

On note :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n\} \qquad P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} \frac{x^{n-k}}{(n-k)\,!}.$$

Démontrer que : $\forall n$, $\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, $\quad a_k^{(n)} = a_k^{(n+1)}$.

On notera désormais : $\forall n$, $\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, $a_k^{(n)} = a_k$.

2° *a.* Démontrer qu'il existe une suite unique de fonctions polynômes vérifiant les 4 conditions :

$P_0 = 1$

α_1

α_2

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 P_n(x)\,dx = 0.$$

b. Écrire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la relation liant $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$.

c. Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ $\quad P_n(1) = P_n(0) = a_n$.

d. Calculer $P_1(x)$, $P_2(x)$ et $P_3(x)$.

Dans la suite du problème, $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ désigne la suite de réels définie dans la partie 2° a. et $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite de fonctions polynômes qui lui est associée :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{n-k}}{(n-k)\,!}.$$

DEUXIÈME PARTIE

On définit les fonctions f et g par :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}^* & g(t) = \dfrac{e^t - 1}{t} \\ g(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}^* & f(t) = \dfrac{t}{e^t - 1}. \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1° Montrer que f et g sont continues en 0.

Montrer que la fonction $t \longmapsto h(t) = f(t) + \dfrac{t}{2}$ est paire.

.../...

2° Soit n un entier naturel. Écrire le développement limité d'ordre n de g au voisinage de 0.

Montrer que la fonction f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0; on le notera :

$$(t \longrightarrow 0)\, f(t) = b_0 + b_1 t + \ldots + b_n t^n + t^n \varepsilon(t) .$$

3° Quelle est, pour $k \in \mathbb{N}^*$, la valeur de b_{2k+1} ?

Quelle est la valeur de b_0 ?

Écrire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la relation liant $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$.

4° En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = b_n$$

et que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad P_{2k+1}(1) = P_{2k+1}(0) = 0.$$

TROISIÈME PARTIE

Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

1° Soit G une fonction indéfiniment dérivable en tout point de [0, 1].

Établir :

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} G(1) - G(0) = \frac{1}{2}\left[G'(1) + G'(0)\right] - \sum_{k=1}^{n} a_{2k}\left[G^{(2k)}(1) - G^{(2k)}(0)\right] \\ - \int_0^1 P_{2n+1}(x)\, G^{2n+2}(x)\, dx \end{aligned} \right.$$

La démonstration peut être faite par récurrence.

2° Soit F une fonction indéfiniment dérivable en tout point de $[\alpha, \beta]$.

Déduire du 1° que :

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} F(\beta) - F(\alpha) = \frac{\beta - \alpha}{2}\left[F'(\beta) + F'(\alpha)\right] \\ - \sum_{k=1}^{n} a_{2k}(\beta - \alpha)^{2k}\left[F^{(2k)}(\beta) - F^{(2k)}(\alpha)\right] \\ - (\beta - \alpha)^{2n+2}\int_0^1 P_{2n+1}(x)\, F^{(2n+2)}\left[\alpha + (\beta - \alpha)x\right] dx. \end{aligned} \right.$$

On pose $F'(x) = f(x)$.

Déduire de (2) une expression de $\int_\alpha^\beta f(x)\, dx$.

3° On partage l'intervalle $[\alpha, \beta]$ en p intervalles égaux, de longueur $h = \dfrac{\beta - \alpha}{p}$.

Établir, en remplaçant $\int_\alpha^\beta f(x)\, dx$ par une somme d'intégrales, que :

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} \int_\alpha^\beta f(x)\, dx = \frac{h}{2}\left[f(\alpha) + f(\beta) + 2\sum_{j=1}^{p-1} f(\alpha + jh)\right] \\ - \sum_{k=1}^{n} a_{2k} h^{2k}\left[f^{(2k-1)}(\beta) - f^{(2k-1)}(\alpha)\right] + R_n \end{aligned} \right.$$

où $|R_n| \leqslant p h^{2n+2} \times \sup\limits_{x \in [\alpha, \beta]} |f^{(2n+1)}(x)| \times \int_0^1 |P_{2n+1}(x)|\, dx.$

4° On prend $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\quad \alpha = 10, \quad \beta = 20, \quad p = 10, \quad n = 1.$

Quelle précision obtient-on en prenant pour log 2 (logarithme népérien de 2) la valeur approchée :

$$\frac{h}{2}\left[f(\alpha) + f(\beta) + 2\sum_{j=1}^{9} f(\alpha + jh)\right] - a_2 h^2\left[f'(\beta) - f'(\alpha)\right]$$

Encadrer ainsi log 2.

-FIN-